24/11/20

Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό(*), $\bar{x} \in U$ σταθερό και $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$. Τότε το όριο $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}$ (αν υπάρχει) ονομ. παράγωγος στην κατεύθυνση v της f στο $\bar{x}$ (**)

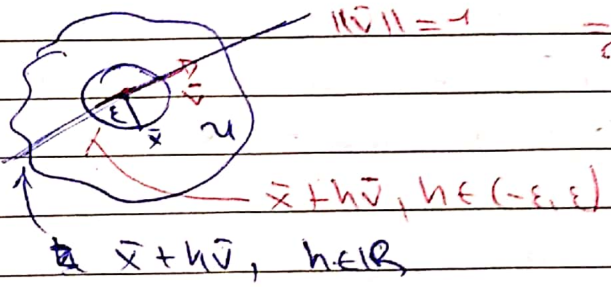
(**) κάθε καλός συμβολισμός συνήθως αποπειράται να περιέχει τα δεδομένα, δηλ. για τι μιλάμε

(*) Εφαρμόζεται - φυσικά - και για περιορισμούς της f σε ανοιχτά σύνολα του π.ο. U.

Θεώρημα: Έστω ότι $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$ σταθ. και f διαφορίσιμη στο $\bar{x}$. Τότε υπάρχουν οι κατευθυνόμενες παράγωγοι (=παράγωγοι κατά κατεύθυνση) σε κάθε κατεύθυνση $\bar{v}$ και ισχύει $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$ όπου $\nabla f(\bar{x}) = \text{grad} f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\right) = \nabla f(\bar{x})$: η παράγωγος της f στο $\bar{x}$ — η κλίση της f στο $\bar{x}$ = το ανάδελτα της f στο $\bar{x}$

Απόδ: (Εφαρμογή κανόνα αλυσίδας)

Έστω $\bar{x} \in U$ όπως είναι δοσμένο. Αφού $\bar{x} \in U$, U ανοιχτό $\exists\, \varepsilon > 0$ $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U \Rightarrow \bar{x} + h\bar{v} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ $\forall\, h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$



$\Leftrightarrow \|\bar{x} + h\bar{v} - \bar{x}\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \|h\bar{v}\| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |h| \cdot \underbrace{\|\bar{v}\|}_{=1} < \varepsilon$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\bar{g}(h) := \bar{x} + h\bar{v} = \begin{pmatrix} g_1(h) \\ \vdots \\ g_n(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 + h v_1 \\ \vdots \\ x_n + h v_n \end{pmatrix}$

Η συνάρτηση $\bar{\gamma}: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ είναι μία συνάρτηση n πραγματικών εξαρτημένων μεταβλητών και μίας ανεξ. μεταβλητής (⟺ διανυσματική συνάρτηση μίας ανεξ. μεταβ.) ⟺
⟺ παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.

[Εδώ πρόκειται για ευθύγραμμο τμήμα]

Αυτή η συνάρτηση έχει παράγωγο στο $\bar{0}$ (**) η οποία ορίζεται ως: $\bar{\gamma}'(0)^{(*)} = D\bar{\gamma}(0) = \begin{pmatrix}\gamma_1'(0)\\ \vdots \\ \gamma_n'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dh}(x_1+hv_1) \\ \vdots \\ \frac{d}{dh}(x_n+hv_n)\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} = \bar{v}$

(*) Ο τόνος για συμβολισμό παραγώγισης (= διαφόρισης) χρησιμοποιείται μόνο όταν είναι ως προς $\boxed{\text{μία}}$ μεταβλητή

(**) το ότι το $\bar{v}$ είναι πράγματι παράγωγος της $\bar{\gamma}: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ με $\bar{\gamma}(h) = \bar{x} + h\bar{v}$ στο σημείο $h = 0 \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ ισχύει, αφού έχουμε: $\lim_{h\to 0} \frac{\bar{\gamma}(h)-\bar{\gamma}(0)-h\bar{v}}{h} = 0$ ⟺

⟺ $\lim_{h\to 0} \frac{\bar{x} + h\bar{v} - \bar{x} - h\bar{v}}{h} = 0 \iff \lim_{\substack{h\to 0\\ (h\neq 0)}} \frac{0}{h}$

σε συμφωνία με τον γενικό ορισμό της παραγώγου $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό [εδώ: $n = 1$, $U = (-\varepsilon,\varepsilon) \subset \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $m = n$ εδώ πιο πάνω].

$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{u})-\bar{f}(\bar{0})-D\bar{f}(\bar{0})\bar{u}}{\|\bar{u}\|}=\bar{0}$ $\quad \bar{f}=\bar{g},\ \bar{u}=h,\ \|\bar{u}\|=|h|]$

Παρατηρούμε ότι στη γενική περίπτωση $\bar{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ισχύει: $D\bar{f}(\bar{0})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ (m γραμμές, n στήλες)
Συνεπώς για $\bar{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ έχουμε $D\bar{g}(0)\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ (n γραμμές, 1 στήλη)

(*) να προσεχθεί ότι: $\lim_{h\to 0}\frac{\bar{\delta}(h)}{|h|}=\bar{0} \Leftrightarrow \forall\ h_\nu\to 0$

$\frac{\bar{\delta}(h_\nu)}{|h_\nu|}\to\bar{0} \Leftrightarrow \frac{\|\bar{\delta}(h_\nu)\|}{|h_\nu|}\to 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\delta}(h_\nu)}{h_\nu}\to\bar{0}\,] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall h_\nu\to 0\ \ \frac{\bar{\delta}(h_\nu)}{h_\nu}\to\bar{0} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\bar{\delta}(h)}{h}=\bar{0}$ [ΑΥΤΟ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΟΤΑΝ ΤΟ ΟΡΙΟ $=\bar{0}$]

Άρα είδαμε ότι η $\bar{g}(h)=\bar{x}+h\bar{v}$, $h\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ είναι διαφορίσιμη στο $h=0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ με παράγωγο
$D\bar{g}(0)\ [=\bar{g}'(0)]=\bar{v}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$
Από την άλλη η $f: U\to\mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}\in U$ με $\bar{x}=\bar{g}(0)$. Τότε (κανόνας αλυσίδας) η:
$(f\circ\bar{g})(h)=f(\bar{g}(h))=f(\bar{x}+h\bar{v})$, $h\in(-\varepsilon,\varepsilon)$
Έχει παράγωγο $(f\circ\bar{g})'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ\bar{g})(h)-(f\circ\bar{g})(0)}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{x}+h\bar{v})-f(\bar{x})}{h}\xrightarrow{h\to 0}\frac{\partial f}{\partial\bar{v}}(\bar{x})$

από τον κανόνα αλυσίδας (ισχύει για $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, και για απλή $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) έχουμε:
$(f\circ\bar{g})'(0)=D(f\circ\bar{g})(0)=\underbrace{Df(\bar{g}(0))}_{=\nabla f(\bar{g}(0))\in\mathbb{R}^{1\times n}}\ \underbrace{D(\bar{g}(0))}_{=\bar{g}'(0)=\bar{v}\in\mathbb{R}^{n\times 1}}=\underbrace{\nabla f(\bar{x})}_{=\nabla f(\bar{x})}\cdot\bar{v}$

Με το προηγούμενο θεώρημα είδαμε ότι για $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\bar{x} \in U$, έχουμε:

$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}$ [f διαφορίσιμη στο $\bar{x}$]

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι η μεγαλύτερη (σε απόλυτες τιμές) τιμή που μπορεί να πάρει η παράγωγος κατά κατεύθυνση $\bar{v}$ της f στο $\bar{x}$ είναι:

$|\nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{v}| \leq \|\nabla f(\bar{x})\| \underbrace{\|\bar{v}\|}_{=1}$, την οποία αυτή τη μεγαλύτερη μη αρνητική τιμή λαμβάνει στην κατεύθυνση $\bar{v} = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$ (όταν $\nabla f(\bar{x}) \neq \bar{0}$), $\|\bar{v}\| = 1$,

αφού

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}\right)}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) \cdot \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|} = \frac{\|\nabla f(\bar{x})\|^2}{\|\nabla f(\bar{x})\|} = \|\nabla f(\bar{x})\|$$

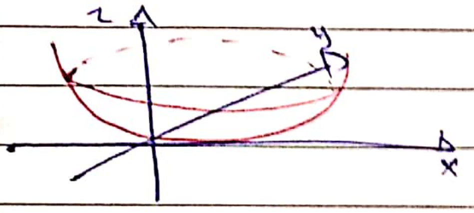
Άρα στην κατεύθυνση της κλίσης (ή της παραγώγου) της f στο $\bar{x}$ (δηλ. για $\bar{v} = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$, $\|\nabla f(\bar{x})\| \neq 0$)

η f παρουσιάζει το μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής, ο οποίος είναι $\|\nabla f(\bar{x})\|$.

Μ' άλλα λόγια: απ' όλες τις κατευθύνσεις προς τις οποίες μπορούμε να ελέγξουμε το πως (πόσο πολύ) μεταβάλλεται (αυξάνει, φθίνει ή μένει σταθερή) μια συνάρτηση, αν κινηθούμε προς την κατεύθυνση αυτή, η κατεύθυνση όπου η f μεταβάλλεται πιο πολύ είναι αυτή προς την οποία "δείχνει" η κλίση της f.

- Ας δούμε ένα πολύ απλό παράδειγμα "ασκήσης"
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$
$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x, 2y) = Df(x,y)$
$:= \text{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ └→ αφού οι μερ. παραγ. $\frac{\partial f}{\partial x}$ υπάρχουν

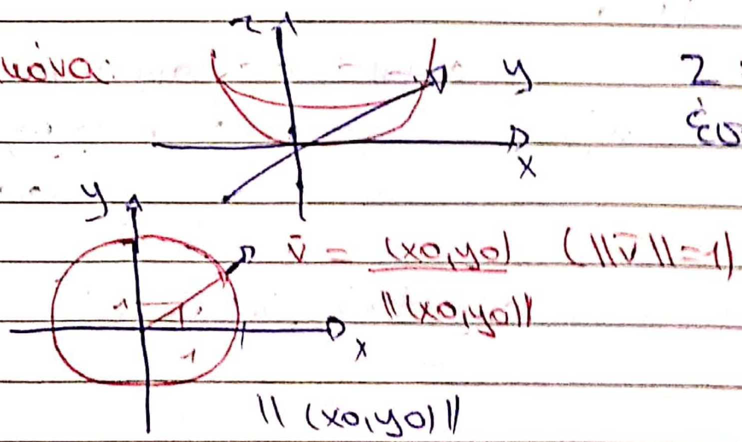
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ και αντίστοιχα για $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$
$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι συνεχείς ως προβολές
$|x-x_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\|$]



Άρα στην κατεύθυνση:
$\bar{v} = \frac{2(x,y)}{2\|(x,y)\|} = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$ με $(x,y) \neq (0,0)$

Η f έχει το μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής
$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}\right)}(x,y) = 2\|(x,y)\|$

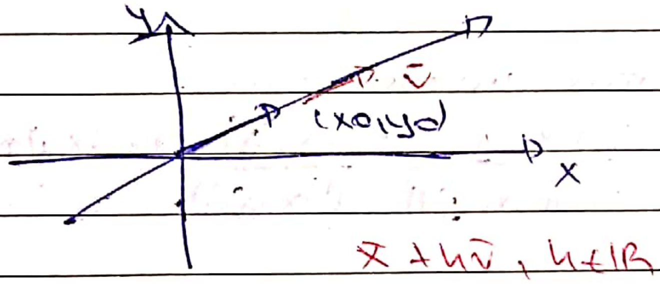
Εικόνα:



$z = f(x,y) = x^2+y^2$
έστω $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Τότε στην κατευθ. $\frac{(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$ η f μεταβάλλεται περισσότερο από όλες άλλες κατευθύνσεις και μάλιστα κατά $2\|(x_0,y_0)\|$

δηλ. η $f\left((x_0,y_0)+h\dfrac{(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}\right) = (f\circ\bar{g})(h)$, $h\in\mathbb{R}$

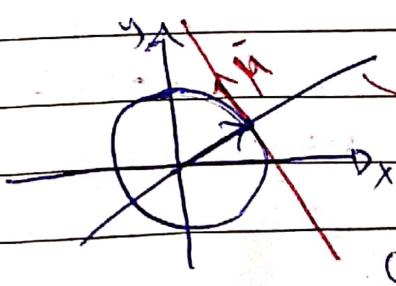
Είναι ο περιορισμός $=: \bar{g}(h)$ της f στην ευθεία που περνάει από το σημείο (x_0,y_0) και έχει κατεύθυνση $\dfrac{(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$ και σ' αυτήν την κατεύθυνση μεταβάλλεται περισσότερο και μάλιστα κατά $2\|(x_0,y_0)\|$. Εδώ δηλ. $f(x,y)=x^2+y^2$: $(f\circ\bar{g})(h) = \left(x_0+\dfrac{hx_0}{\|..\|}\right)^2+\left(y_0+\dfrac{hy_0}{\|..\|}\right)^2$, $h\in\mathbb{R}$ και $(f\circ\bar{g})'(0) = 2\|(x_0,y_0)\|$



$(f\circ\bar{g})(h) = x_0^2+y_0^2+h^2\|(x_0,y_0)\| + h2\|(x_0,y_0)\|$

Αντιθέτως, π.χ. στην κατεύθυνση $\dfrac{(-y_0, x_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$, δηλ. $\perp$ στην κατεύθυνση $\dfrac{(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$ η f δεν μεταβάλλεται καθόλου: $\dfrac{df}{d\bar{\mu}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\bar{\mu}$
$= 2(x_0,y_0)\cdot\dfrac{(-y_0,x_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$
$= 0$

Εικόνα:



$(x_0,y_0)+h\bar{v}$, $h\in\mathbb{R}$ (1)

$(x_0,y_0)+h\bar{\mu}$, $h\in\mathbb{R}$ (2)

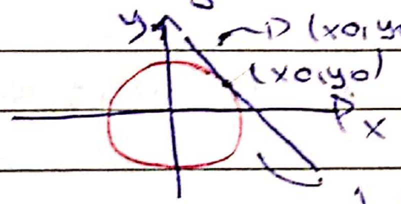
(1) Αν κινηθώ ⊥ στην κατ. $\bar{v}$ τότε η f μεγαλώνει πιο πολύ

(2) Αν κινηθώ — στην κατ. $\bar{\mu}$ τότε η f δεν αλλάζει καθόλου

Αυτό συμβαίνει επειδή η καμπύλη στάθμης $\|(x_0,y_0)\|^2$ της $f(x,y)$ είναι (ορισμός): $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underset{\sim}{f(x,y)} = \|(x_0,y_0)\|^2\}$ $= x^2+y^2$

δηλ. ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\|(x_0,y_0)\|$

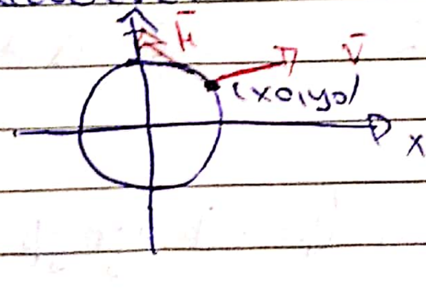
Αν κινηθώ πάνω στον ○ τότε η τιμή της f δεν αλλάζει



$L_f(\|(x_0,y_0)\|^2)$ για την $f(x,y)=x^2+y^2$

Η ευθεία $(x_0,y_0)+h\bar{\mu}$ είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη σταθμ. $\|(x_0,y_0)\|^2$ της f στο (x_0,y_0) ⇒
⇒ $\frac{\partial f}{\partial \bar{\mu}}(x_0,y_0)=0$

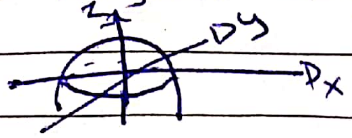
Συνοψίζουμε: στην κατευθ. εφαπτομενικά της καμπ. στάθμης (όπου η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή) η παράγ. κατά κατευθ. $=0$, ενώ στην κάθετη κατεύθυνση $\bar{v}$ η f αλλάζει το πιο πολύ



$\bar{v}$: προς τα εκεί η f αλλάζει όσο περισσότερο γίνεται

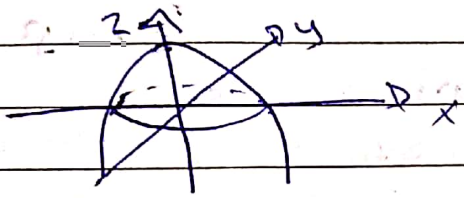
$\bar{\mu}$: προς τα εκεί η f δεν αλλάζει καθόλου

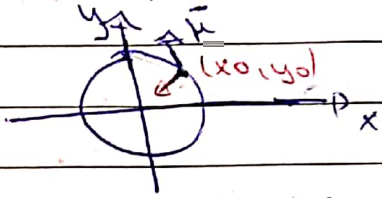
Φυσιολατρικό παραδ.: $g(x,y) = 1-(x^2+y^2) \Rightarrow \nabla g(x,y) = -2(x,y)$



$\Rightarrow$ στην κατευθ. $\vec{v} = \dfrac{-2(x_0,y_0)}{\|-2(x_0,y_0)\|} = \dfrac{-(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$

η $g(x,y) = 1-(x^2+y^2)$ αλλάζει το πιο πολύ, δηλ: αν η g δίνει επιφάνεια βουνού προς το $\vec{v}$ έχουμε την πιο απότομη κλίση (*)





$\Rightarrow$ Στην κατεύθυνση $\vec{\mu} = \dfrac{(-y_0, x_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$ η τιμή της g δεν αλλάζει καθόλου

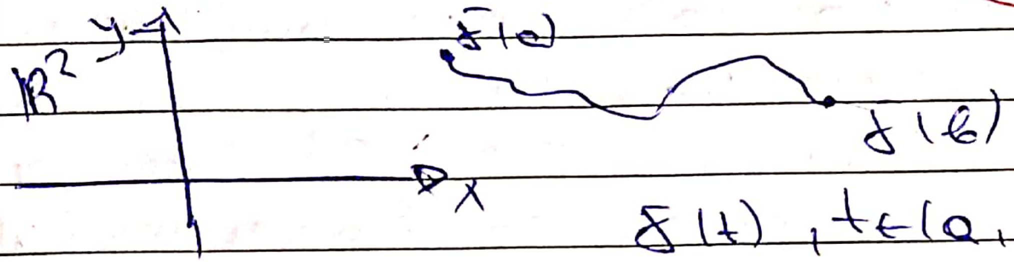
(*) το νερό κατεβαίνει το βουνό στην κατευθ.
$-\vec{v} = \dfrac{(x_0,y_0)}{\|(x_0,y_0)\|}$

Εμβόλιμα: Λίγα λόγια για καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: ονομάζουμε παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ μια συνεχή απεικόνιση $f: I \to \mathbb{R}^n$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα (π.χ. (a,b) ή $[a,b]$ ή $[0,\infty)$ ή $\mathbb{R}$). Για ευκολία έστω $I = [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Δηλ. $\forall t \in [a,b]: f(t) \in \mathbb{R}^n$

Ερμηνεία: για κάθε τιμή $t \in [a,b]$ της (μιας) πραγμ.

Για κάθε χρονική στιγμή $t \in [\alpha, \beta]$ βρισκόμαστε στο σημείο $\gamma(t) \in \mathbb{R}^4$ του χώρου.



$\gamma(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$

Στην κλασσική μηχανική μία τέτοια παραμετρική καμπύλη ονομάζεται τροχιά ή διαδρομή ή δρόμος (path)

Σημαντικό ρόλο σ' αυτήν την περιγραφή, παίζει μία «δυναμική» μία «κίνηση»: ≡ έχουμε κάθε χρονική στιγμή που βρισκόμαστε

Η εικόνα της απεικόνισης, $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^4$ ονομάζεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^4$